$$\int\limits_{\text{14 июня 2016}}^{\text{28 июня 2016}} \left(\begin{array}{c} \text{Московские сборы} \\ \text{секция математики} \end{array} \right) \mathrm{d}t$$

Немного о структуре

Материалы разбиты по группам, в пределах каждой группы отсортированы по темам:

- *тренировочные олимпиады;*
- алгебра;
  - теория чисел;
  - многочлены;
  - неравенства;
- геометрия;
- комбинаторика;
  - теория графов.

Материалы, общие для нескольких групп, дублируются. Все материалы сопровождаются ссылками на исходные файлы LaTeX.

source:integral.tex

Оглавление

Глава 1

10-3

Неравенства. Квадратный трехчлен

1. Докажите, что для любых a, b, c выполнено неравенство

$$a^2b^2 + a^2c^2 + b^2c^2 \geqslant abc(a + b + c)\,.$$

2. Пусть $x, y, z \in [0; 1]$. Докажите, что

$$3(x^2y^2 + x^2z^2 + y^2z^2) - 2xyz(x + y + z) \leqslant 3\,.$$

3. Пусть $a, b, c, d \in [0; 1]$. Докажите, что

$$(a + b + c + d + 1)^2 \geqslant 4(a^2 + b^2 + c^2 + d^2)\,.$$

4. Для неотрицательных чисел a, b, c, d докажите, что

$$(ab + bc + ac)^2 \geqslant 3abc(a + b + c)\,.$$

source:algebra/inequality/quadratic-trinomial-g10r3.tex

Транснеравенство

Транснеравенство. Если $a_1 \geqslant \ldots \geqslant a_n$, $b_1 \geqslant \ldots \geqslant b_n$ и $\{i_1, \ldots, i_n\} = \{1, \ldots, n\}$, то

$$a_1b_1 + \ldots + a_nb_n \geqslant a_1b_{i_1} + \ldots + a_nb_{i_n} \geqslant a_1b_n + \ldots + a_nb_1\,.$$

1. *Неравенство Чебышёва.* Докажите, что для чисел $a_1 \geqslant \ldots \geqslant a_n$, $b_1 \geqslant \ldots \geqslant b_n$ справедливо неравенство

$$n \cdot (a_1b_1 + \ldots + a_nb_n) \geqslant (a_1 + \ldots + a_n) \cdot (b_1 + \ldots + b_n) \geqslant n \cdot (a_1b_n + \ldots + a_nb_1)\,.$$

2. a, b, c — положительные числа. Докажите неравенство

$$a \cdot 2^a + b \cdot 2^b + c \cdot 2^c \geqslant a \cdot 2^b + b \cdot 2^c + c \cdot 2^a\,.$$

3. x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 — положительные числа. Докажите неравенство

$$\frac{x_1^2}{x_2} + \frac{x_2^2}{x_3} + \frac{x_3^2}{x_4} + \frac{x_4^2}{x_5} + \frac{x_5^2}{x_1} \geqslant x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5\,.$$

4. a, b, c — положительные числа. Докажите неравенство

$$a + b + c \geqslant \frac{a(b+1)}{a+1} + \frac{b(c+1)}{b+1} + \frac{c(a+1)}{c+1}\,.$$

5. Пусть $\{a_n\}$ — последовательность различных натуральных чисел. Докажите неравенство

$$\frac{a_1}{1^2} + \frac{a_2}{2^2} + \ldots + \frac{a_n}{n^2} \geqslant 1 + \frac{1}{2} + \ldots + \frac{1}{n}\,.$$

6. Пусть a, b, c — стороны треугольника, а α, β, γ — соответствующие углы того же треугольника. Докажите неравенство

$$\alpha a + \beta b + \gamma c \geqslant \frac{1}{2}(\alpha b + \beta c + \gamma b + \alpha c + \beta a + \gamma a)\,.$$

7. Для положительных a_i докажите неравенство.

$$\sum_{i<j} \sqrt{a_ia_j} \leqslant \frac{n-1}{2} \sum_{i=1}^{n} a_i\,.$$

8. Пусть a, b, c, d — положительные числа. Докажите неравенство

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{4}{c} + \frac{16}{d} \geqslant \frac{64}{a+b+c+d}\,.$$

Теоремы Ферма и Эйлера

Малая теорема Ферма (1). Пусть p — простое число, a не делится на p. Тогда $(a^{p-1}-1)$ делится на p.

Малая теорема Ферма (2). Пусть a — целое число, p — простое. Тогда $(a^p - a)$ делится на p.

Теорема Эйлера. Пусть a и n — натуральные, взаимно простые числа. Определим *функцию Эйлера* $\varphi(n)$ как количество натуральных чисел, не превосходящих n и взаимно простых с ним. Тогда $(a^{\varphi(n)}-1)$ делится на n.

1. Сумма трех чисел a, b, c делится на 30. Докажите, что $a^5+b^5+c^5$ также делится на 30.

2. Найдите все такие целые числа a, для которых число $a^{10}+1$ делится на 10.

3. Докажите, что $30^{239}+239^{30}$ — составное.

4. Существует ли степень тройки, заканчивающаяся на 0001?

5. **(a)** Докажите, что ни при каком целом k число k^2+k+1 не делится на 101.
(b) Пусть p — простое число и $p>3$. Докажите, что если разрешимо сравнение $x^2+x+1\equiv 0 \pmod p$, то $p\equiv 1 \pmod 6$. Выведите отсюда бесконечность множества простых чисел вида $6n+1$.
(c) Пусть p — простое число и $p>5$. Докажите, что если разрешимо сравнение $x^4+x^3+x^2+x+1\equiv 0 \pmod p$, то $p\equiv 1 \pmod 5$. Выведите отсюда бесконечность множества простых чисел вида $5n+1$.

6. *Теорема Вильсона.* Пусть p — простое число. Докажите, что $(p-1)!\equiv -1 \pmod p$.

7. **(a)** Пусть p, q — различные натуральные числа, a — натуральное. Найдите $\varphi(p^a)$, $\varphi(pq)$.
(b) Докажите, что если a, b — взаимно просты, то $\varphi(ab)=\varphi(a)\cdot\varphi(b)$
(c) Найдите $\varphi(n)$, где $n=p_1^{\alpha_1}\cdot\ldots\cdot p_k^{\alpha_k}$.

8. *Усиление теоремы Эйлера.* Пусть $m=p_1^{\alpha_1}\cdot\ldots\cdot p_k^{\alpha_k}$, $x=\text{НОК}\big(\varphi(p_1^{\alpha_1}),\ldots,\varphi(p_k^{\alpha_k})\big)$. Докажите, что для любого a, взаимно простого с m, выполняется сравнение $a^x\equiv 1 \pmod m$.

9. Пусть p — простое число, тогда $(11\ldots122\ldots233\ldots99-123456789)$ (в первом числе каждая цифра встречается ровно p раз) делится на p.

10. Докажите, что в любой арифметической прогрессии составленной из натуральных чисел, есть бесконечно много членов, в разложении которых на простые множители входят в точности одни и те же простые числа.

source:algebra/number-theory/euler-theorem-g10r3.tex

Показатели

1. Пусть a, n — взаимно простые числа. Рассмотрим последовательность остатков по модулю n следующих чисел: $1, a, a^2, \ldots$ Докажите, что эта последовательность периодическая и не содержит предпериода.

Определение. Минимальный период последовательности остатков из предыдущей задачи называется *показателем* a по модулю n. Далее будем обозначать его буквой d.

2. Зафиксируем взаимно простые числа a и n.
(a) Докажите, что d — показатель a по модулю n тогда и только тогда, когда d — наименьшее такое натуральное число, что $(a^d - 1)$ делится на n.
(b) Пусть d — показатель a по модулю n. Пусть $a^l \equiv 1 \pmod{n}$. Докажите, что $d \mid l$.
(c) Докажите, что $a^s \equiv a^r \pmod{n}$ тогда и только тогда, когда $s \equiv r \pmod{d}$.
(d) Докажите, что показатель любого взаимно простого с n числа по модулю n делит $\varphi(n)$ (функция Эйлера).

3. Найдите все простые p и q такие, что $q \mid (2^p - 1)$ и $p \mid (2^q - 1)$.

4. Докажите, что если $a > 1$, то n делит $\varphi(a^n - 1)$.

5. **(a)** Пусть $p > 2$ — простое число. Докажите, что любой простой делитель числа $(a^p - 1)$ или делит $(a - 1)$ или имеет вид $2px + 1$.
(b) Выведите отсюда, что простых чисел вида $2pk + 1$ бесконечно много.

6. Найдите все простые p и q, для которых $5^p + 5^q$ делится на pq.

7. Найдите все натуральные n такие, что $n \mid (2^n - 1)$.

source:algebra/number-theory/exponent-g10r3.tex

Линейные рекурренты

Определение. Последовательность чисел $a_0, a_1, \ldots, a_n, \ldots$, которая удовлетворяет с заданными p и q соотношению

$$a_{n+2} = pa_{n+1} + qa_n\,, \quad n = 0, 1, 2, \ldots$$

называется *линейной рекуррентной (возвратной) последовательностью второго порядка.*

Уравнение

$$x^2 - px - q = 0$$

называется *характеристическим* уравнением последовательности $\{a_n\}$.

0. Пусть последовательности a_n и b_n являются линейными рекуррентными последовательностями второй порядка, с одинаковыми p и q. Докажите, что последовательность $\alpha a_n + \beta b_n$ также является реккурентной последовательностью второго порядка (с теми же p, q).

1. **(a)** Докажите, что геометрическая прогрессия $\{a_n\} = bx_0^n$ удовлетворяет соотношению $a_{n+2} = pa_{n+1} + qa_n$ $(n = 0, 1, 2, \ldots)$ тогда и только тогда, когда x_0 — корень характеристического уравнения $x^2 - px - q = 0$.
(b) Пусть характеристическое уравнение последовательности $\{a_n\}$ имеет два различных корня x_1 и x_2. Докажите, что при фиксированных a_0, a_1 существует ровно одна пара чисел c_1, c_2 такая, что $a_n = c_1x_1^n + c_2x_2^n$ $(n \geqslant 0)$.

2. Найдите формулу n-го члена для последовательностей, заданных условиями:
(a) $a_0 = 0, a_1 = 1, a_{n+2} = 5a_{n+1} - 6a_n, n \geqslant 0$;
(b) $a_0 = 1, a_1 = 2, a_{n+2} = 2a_{n+1} - a_n, n \geqslant 0$;
(c) *Числа Фибоначчи.* $F_0 = 0, F_1 = 1, F_{n+2} = F_{n+1} + F_n, n \geqslant 0$.

3. Пусть характеристическое уравнение последовательности $\{a_n\}$ имеет корень x_0 кратности 2. Докажите, что при фиксированных a_0, a_1 существует ровно одна пара чисел c_1, c_2 такая, что

$$a_n = (c_1 + c_2n)x_0^n\,, \quad n = 0, 1, 2, \ldots\,.$$

4. Садовник, привив черенок редкого растения, оставляет его расти два года, а затем ежегодно берет от него по 6 черенков. С каждым новым черенком он поступает аналогично. Сколько будет растений и черенков на n-ом году роста первоначального растения?

5. Биолог выращивает микробов, живущих по следующему принципу: в первый день после рождения, ровно в 8:30 каждый микроб порождает 5 новых микробов. во второй и последующие дни после рождения ровно в 9:00 каждый съедает 4 (новорожденных) микроба. Изначально у биолога был 1 микроб, сколько микробов будет у него на n-ый день?

6. Лягушка прыгает по вершинам треугольника ABC, перемещаясь каждый раз в одну из соседних вершин. Сколькими способами она может попасть из A в A за n прыжков?

7. В нулевой момент времени в вершине A шестиугольника $ABCDEF$ сидит лягушка. Каждую секунду лягушка перепрыгивает в одну из соседних вершин, выбирая направление случайным образом равновероятно. Сколькими способами она может попасть из A в C за n прыжков?

source:algebra/recurrence-relation-g10/r3.tex

Изодинамические центры

Точка Ap называется **изодинамическим центром треугольника,** если ее проекции на стороны являются вершинами равностороннего треугольника.

1. **(a)** Дан остроугольный треугольник ABC и его изодинамический центр Ap, лежащий внутри треугольника. Прямые AAp, BAp и CAp повторно пересекают описанную окружность треугольника ABC в точках A_1, B_1 и C_1. Докажите, что треугольник $A_1B_1C_1$ равносторонний.
(b) Сформулируйте и докажите обратное утверждение.

2. Даны числа $k_1, k_2, \ldots, k_n, c$ и точки на плоскости $A_1, A_2, \ldots, A_n$. Докажите, что множество точек X, обладающих тем свойством, что $k_1A_1X^2 + \ldots + k_nA_nX^2 = c$
(a) при $k_1 + \ldots + k_n \neq 0$ является окружностью, точкой или пустым множеством;
(b) при $k_1 + \ldots + k_n = 0$ является прямой, плоскостью или пустым множеством.

Окружность Аполлония ω_A неравнобедренного треугольника ABC — это геометрическое место точек M, для которых $MB : MC = AB : AC$. Аналогично определяются окружности Аполлония ω_B и ω_C.

3. Докажите, что
(a) отрезок, соединяющий основания биссектрис внутреннего и внешнего углов при вершине A, является диаметром окружности Аполлония ω_A;
(b) центр окружности Аполлония ω_A — точка пересечения касательной к описанной окружности в вершине A с прямой BC;
(c) радикальная ось окружности ω_A и описанной окружности треугольника ABC — это симедиана треугольника ABC, проведенная из вершины A.

4. **(a)** Дана точка P и треугольник ABC. Докажите, что стороны педального треугольника, соответствующего точке P, вычисляются по формулам $a \cdot PA/(2R)$, $b \cdot PB/(2R)$, $c \cdot PC/(2R)$. В задаче использованы стандартные обозначения для треугольника ABC.
(b) Выведите из пункта (4a) *теорему Птолемея:*

$$PA \cdot BC + PB \cdot CA \geqslant PC \cdot AB\,,$$

причем равенство достигается только в случае, когда точка P лежит на дуге AB описанной около треугольника ABC окружности.
(c) Докажите, что изодинамический центр принадлежит всем трем окружностям Аполлония.

5. **(a)** Докажите, что три окружности Аполлония имеют общую радикальную ось, проходящую через центр описанной окружности.
(b) Докажите, что изодинамических центра у неравенобедренного треугольника ровно два.
(c) Докажите, что изодинамические центры симметричны (являются инверсными образами друг друга) относительно описанной окружности треугольника ABC.

6. Докажите, что изодинамические центры, центр описанной окружности и точка Лемуана лежат на одной прямой *(ось Брокара треугольника).*

7. **(a)** Пусть Ap — изодинамический центр, лежащий внутри остроугольного треугольника ABC. Каков угол между описанной окружностью треугольника ABC и описанной окружностью треугольника $ApBC$?

(b) Выразите углы $\angle AApB$, $\angle BApC$ и $\angle CApA$ через углы треугольника ABC.

source:geometry/isodynamic-point-g10.tex

Изогональное сопряжение

Определение. Дан треугольник ABC. Две точки P и Q называются *изогонально сопряженными* относительно треугольника ABC, если прямые PA и QA симметричны относительно биссектрисы угла A, прямые PB и QB симметричны относительно биссектрисы угла B, а прямые PC и QC симметричны относительно биссектрисы угла C.

1. **(a)** Докажите, что точка пересечения высот и центр описанной окружности треугольника изогонально сопряжены.
(b) Какие точки изогонально сопряжены самим себе?
(c) Касательные к описанной окружности треугольника ABC в точках B и C пересекаются в точке P. Точка Q симметрична точке A относительно середины отрезка BC. Докажите, что P и Q изогонально сопряжены относительно треугольника ABC.
(d) Докажите, что изогонально сопряжены точка, из которой стороны треугольника видны под углом 120° *(точка Торричелли)* и точка, проекции которой на стороны треугольника образуют равносторонний треугольник *(изодинамический центр треугольника)*.
(e) Докажите, что изогонально сопряжены точка пересечения медиан треугольника и точка, для которой сумма квадратов расстояний до его сторон минимальна.

2. **(a)** Пусть точки P и Q изогонально сопряжены относительно треугольника ABC. Пусть x, y и z — расстояния от точки P до прямых BC, CA и AB соответственно, а x', y' и z' — расстояния от точки Q до прямых BC, CA и AB соответственно. Докажите, что $x \cdot x' = y \cdot y' = z \cdot z'$.
(b) Опустим из точки P перпендикуляры на стороны треугольника (или их продолжения) и рассмотрим окружность, проходящую через основания перпендикуляров. Докажите, что эта окружность совпадает с окружностью, построенной таким же образом для точки Q.
(c) Выведите из пункта (2b), что основания высот треугольника и середины его сторон лежат на одной окружности.

3. **(a)** В окружность вписан шестиугольник $ABCDEF$. Отрезок AC пересекается с отрезком BF в точке X, BE с AD — в точке Y и CE и DF в точке Z. Докажите, что треугольники ABY и EDY подобны, причем точке в треугольнике ABY, изогонально сопряженной точке X, соответствует точка Z в треугольнике EDY.
(b) Выведите из пункта (3a), что точки X, Y и Z лежат на одной прямой.

4. Докажите, что при изогональном сопряжении окружность, проходящая через вершины B и C, отличная от описанной, переходит в окружность, проходящую через B и C.

5. В трапеции $ABCD$ боковая сторона CD перпендикулярна основаниям, O — точка пересечения диагоналей. На описанной окружности треугольника OCD взята точка S, диаметрально противоположная точке O. Докажите, что $\angle BSC = \angle ASD$.

6. Стороны треугольника ABC видны из точки T под углами 120°. Докажите, что прямые, симметричные прямым AT, BT и CT относительно прямых BC, CA и AB соответственно,

пересекаются в одной точке.

source:geometry/isogonal-conjugate-g10.tex

Разнобой-повторение

1. Точка X вне треугольника ABC такова, что A лежит внутри треугольника BXC. При этом $2\angle XBA = \angle ACB$, $2\angle XCA = \angle ABC$. Докажите, что центры описанной и вневписанной со стороны BC окружностей треугольника ABC и точка X лежат на одной прямой.

2. Найдите внутри треугольника точку с минимальной суммой квадратов расстояний до вершин.

3. На окружности даны точки A, B, C, D такие, что AB — диаметр круга, а CD — нет. Докажите, что прямая, соединяющая точку пересечения касательных к окружности в точках C и D с точкой пересечения прямых AC и BD, перпендикулярна прямой AB.

4. Вписанная окружность треугольника ABC касается сторон AB и AC в точках C_1 и A_1 соответственно. Медиана AM пересекает B_1C_1 в точке F. Докажите, что $FI \perp BC$, где I — центр вписанной окружности.

5. Окружность касается сторон треугольника AB и BC треугольника ABC в точках D и E, а также внутренним образом описанной окружности треугольника. Докажите, что DE проходит через центр вписанной окружности треугольника ABC.

6. Вписанная в треугольник ABC окружность касается сторон BC, CA и AB в точках A_1, B_1 и C_1 соответственно. Через точку A_1 проведена прямая ℓ, перпендикулярная отрезку AA_1. Она пересекается с прямой B_1C_1 в точке X. Докажите, что прямая BC делит отрезок AX пополам.

7. В остроугольном треугольнике ABC точки I_a и I_c — центры вневписанных окружностей, H — основание высоты из вершины B. Прямая I_aH пересекает BC в точке A', а прямая I_cH пересекает AB в точке C'. Докажите, что $A'C'$ проходит через центр вписанной окружности треугольника ABC.

8. В сегмент, ограниченный хордой и дугой AB окружности, вписана окружность ω с центром I. Обозначим середину указанной дуги AB через M, а середину дополнительной дуги через N. Из точки N проведены две прямые, касающиеся ω в точках C и D. Противоположные стороны AD и BC четырехугольника $ABCD$ пересекаются в точке Y, а его диагонали пересекаются в точке X. Докажите, что точки X, Y, I и M лежат на одной прямой.

9. Серединный перпендикуляр к диагонали AC вписанного четырехугольника $ABCD$ пересекает прямые AD и CD в точках P и Q. Докажите, что биссектрисы углов ABC и PBQ совпадают.

10. Четырехугольник $ABCD$ вписан в окружность с центром O и диаметром AC. Касательная в точке C к окружности пересекает прямую BD в точке P. Луч AB пересекает отрезок PO в точке E. Докажите, что $\angle DCE = 90^\circ$.

source:geometry/mixture-g10/r3.tex

Глава 2

10-2

Разнобой по теории чисел

1. Найдите наибольший общий делитель чисел

$$A_n = 2^{3n} + 3^{6n+2} + 5^{6n+2}, \quad \text{где } n = 0, 1, \dots, 2016.$$

2. Найдите все такие пары целых положительных чисел (m, n), что $5^5 - 5^4 + 5^n = m^2$.

3. Многочлен $f(x)$ с целыми коэффициентами называется *три-делимым*, если 3 делит $f(k)$ для любого натурального k. Сформулируйте критерий три-делимости многочлена.

4. Пусть $f(x) = x^{p-1} + x^{p-2} + \ldots + x + 1$, где p — простое число. Натуральное число m таково, что $p \mid m$. Докажите, что любой простой делитель $f(m)$ взаимно прост с $m(m-1)$.

5. Докажите, что для любого простого p число $p^{p+1} + (p+1)^p$ не является точным квадратом.

6. Решите в натуральных числах уравнение $x^2 + x^3 = 2^y + 16$.

7. Найдите все натуральные числа m и n, для которых $n^m = (n-1)! + 1$.

source:algebra/number-theory/mixture-g10/r2.tex

Изодинамические центры

Точка Ap называется **изодинамическим центром треугольника,** если ее проекции на стороны являются вершинами равностороннего треугольника.

1. **(a)** Дан остроугольный треугольник ABC и его изодинамический центр Ap, лежащий внутри треугольника. Прямые AAp, BAp и CAp повторно пересекают описанную окружность треугольника ABC в точках A_1, B_1 и C_1. Докажите, что треугольник $A_1B_1C_1$ равносторонний.
(b) Сформулируйте и докажите обратное утверждение.

2. Даны числа $k_1, k_2, \ldots, k_n, c$ и точки на плоскости $A_1, A_2, \ldots, A_n$. Докажите, что множество точек X, обладающих тем свойством, что $k_1A_1X^2 + \ldots + k_nA_nX^2 = c$
(a) при $k_1 + \ldots + k_n \neq 0$ является окружностью, точкой или пустым множеством;
(b) при $k_1 + \ldots + k_n = 0$ является прямой, плоскостью или пустым множеством.

Окружность Аполлония ω_A неравнобедренного треугольника ABC — это геометрическое место точек M, для которых $MB : MC = AB : AC$. Аналогично определяются окружности Аполлония ω_B и ω_C.

3. Докажите, что
(a) отрезок, соединяющий основания биссектрис внутреннего и внешнего углов при вершине A, является диаметром окружности Аполлония ω_A;
(b) центр окружности Аполлония ω_A — точка пересечения касательной к описанной окружности в вершине A с прямой BC;
(c) радикальная ось окружности ω_A и описанной окружности треугольника ABC — это симедиана треугольника ABC, проведенная из вершины A.

4. **(a)** Дана точка P и треугольник ABC. Докажите, что стороны педального треугольника, соответствующего точке P, вычисляются по формулам $a \cdot PA/(2R)$, $b \cdot PB/(2R)$, $c \cdot PC/(2R)$. В задаче использованы стандартные обозначения для треугольника ABC.
(b) Выведите из пункта (4a) *теорему Птолемея:*

$$PA \cdot BC + PB \cdot CA \geqslant PC \cdot AB\,,$$

причем равенство достигается только в случае, когда точка P лежит на дуге AB описанной около треугольника ABC окружности.
(c) Докажите, что изодинамический центр принадлежит всем трем окружностям Аполлония.

5. **(a)** Докажите, что три окружности Аполлония имеют общую радикальную ось, проходящую через центр описанной окружности.
(b) Докажите, что изодинамических центра у неравенобедренного треугольника ровно два.
(c) Докажите, что изодинамические центры симметричны (являются инверсными образами друг друга) относительно описанной окружности треугольника ABC.

6. Докажите, что изодинамические центры, центр описанной окружности и точка Лемуана лежат на одной прямой *(ось Брокара треугольника).*

7. **(a)** Пусть Ap — изодинамический центр, лежащий внутри остроугольного треугольника ABC. Каков угол между описанной окружностью треугольника ABC и описанной окружностью треугольника $ApBC$?

(b) Выразите углы $\angle AApB$, $\angle BApC$ и $\angle CApA$ через углы треугольника ABC.

source:geometry/isodynamic-point-g10.tex

Изогональное сопряжение

Определение. Дан треугольник ABC. Две точки P и Q называются *изогонально сопряженными* относительно треугольника ABC, если прямые PA и QA симметричны относительно биссектрисы угла A, прямые PB и QB симметричны относительно биссектрисы угла B, а прямые PC и QC симметричны относительно биссектрисы угла C.

1. **(a)** Докажите, что точка пересечения высот и центр описанной окружности треугольника изогонально сопряжены.
(b) Какие точки изогонально сопряжены самим себе?
(c) Касательные к описанной окружности треугольника ABC в точках B и C пересекаются в точке P. Точка Q симметрична точке A относительно середины отрезка BC. Докажите, что P и Q изогонально сопряжены относительно треугольника ABC.
(d) Докажите, что изогонально сопряжены точка, из которой стороны треугольника видны под углом 120° *(точка Торричелли)* и точка, проекции которой на стороны треугольника образуют равносторонний треугольник *(изодинамический центр треугольника)*.
(e) Докажите, что изогонально сопряжены точка пересечения медиан треугольника и точка, для которой сумма квадратов расстояний до его сторон минимальна.

2. **(a)** Пусть точки P и Q изогонально сопряжены относительно треугольника ABC. Пусть x, y и z — расстояния от точки P до прямых BC, CA и AB соответственно, а x', y' и z' — расстояния от точки Q до прямых BC, CA и AB соответственно. Докажите, что $x \cdot x' = y \cdot y' = z \cdot z'$.
(b) Опустим из точки P перпендикуляры на стороны треугольника (или их продолжения) и рассмотрим окружность, проходящую через основания перпендикуляров. Докажите, что эта окружность совпадает с окружностью, построенной таким же образом для точки Q.
(c) Выведите из пункта (2b), что основания высот треугольника и середины его сторон лежат на одной окружности.

3. **(a)** В окружность вписан шестиугольник $ABCDEF$. Отрезок AC пересекается с отрезком BF в точке X, BE с AD — в точке Y и CE и DF в точке Z. Докажите, что треугольники ABY и EDY подобны, причем точке в треугольнике ABY, изогонально сопряженной точке X, соответствует точка Z в треугольнике EDY.
(b) Выведите из пункта (3a), что точки X, Y и Z лежат на одной прямой.

4. Докажите, что при изогональном сопряжении окружность, проходящая через вершины B и C, отличная от описанной, переходит в окружность, проходящую через B и C.

5. В трапеции $ABCD$ боковая сторона CD перпендикулярна основаниям, O — точка пересечения диагоналей. На описанной окружности треугольника OCD взята точка S, диаметрально противоположная точке O. Докажите, что $\angle BSC = \angle ASD$.

6. Стороны треугольника ABC видны из точки T под углами 120°. Докажите, что прямые, симметричные прямым AT, BT и CT относительно прямых BC, CA и AB соответственно,

пересекаются в одной точке.

source:geometry/isogonal-conjugate-g10.tex

Разнобой-повторение

1. Точка X вне треугольника ABC такова, что A лежит внутри треугольника BXC. При этом $2\angle XBA = \angle ACB$, $2\angle XCA = \angle ABC$. Докажите, что центры описанной и вневписанной со стороны BC окружностей треугольника ABC и точка X лежат на одной прямой.

2. Найдите внутри треугольника точку с минимальной суммой квадратов расстояний до вершин.

3. На окружности даны точки A, B, C, D такие, что AB — диаметр круга, а CD — нет. Докажите, что прямая, соединяющая точку пересечения касательных к окружности в точках C и D с точкой пересечения прямых AC и BD, перпендикулярна прямой AB.

4. Вписанная в треугольник ABC окружность касается сторон BC, CA и AB в точках A_1, B_1 и C_1 соответственно. Через точку A_1 проведена прямая ℓ, перпендикулярная отрезку AA_1. Она пересекается с прямой B_1C_1 в точке X. Докажите, что прямая BC делит отрезок AX пополам.

5. В остроугольном треугольнике ABC точки I_a и I_c — центры вневписанных окружностей, H — основание высоты из вершины B. Прямая I_aH пересекает BC в точке A', а прямая I_cH пересекает AB в точке C'. Докажите, что $A'C'$ проходит через центр вписанной окружности треугольника ABC.

6. Окружность касается сторон треугольника AB и BC треугольника ABC в точках D и E, а также внутренним образом описанной окружности треугольника. Докажите, что DE проходит через центр вписанной окружности треугольника ABC.

7. В сегмент, ограниченный хордой и дугой AB окружности, вписана окружность ω с центром I. Обозначим середину указанной дуги AB через M, а середину дополнительной дуги через N. Из точки N проведены две прямые, касающиеся ω в точках C и D. Противоположные стороны AD и BC четырехугольника $ABCD$ пересекаются в точке Y, а его диагонали пересекаются в точке X. Докажите, что точки X, Y, I и M лежат на одной прямой.

8. Серединный перпендикуляр к диагонали AC вписанного четырехугольника $ABCD$ пересекает прямые AD и CD в точках P и Q. Докажите, что биссектрисы углов ABC и PBQ совпадают.

9. Четырехугольник $ABCD$ вписан в окружность с центром O и диаметром AC. Касательная в точке C к окружности пересекает прямую BD в точке P. Луч AB пересекает отрезок PO в точке E. Докажите, что $\angle DCE = 90^\circ$.

source:geometry/mixture-g10/r2.tex

Глава 3

10-1

Разнобой по теории чисел

1. Найдите наибольший общий делитель чисел

$$A_n = 2^{3n} + 3^{6n+2} + 5^{6n+2}, \quad \text{где } n = 0, 1, \ldots, 2016.$$

2. Многочлен $f(x)$ с целыми коэффициентами называется *три-делимым*, если 3 делит $f(k)$ для любого натурального k. Сформулируйте критерий три-делимости многочлена.

3. Пусть $f(x) = x^{p-1} + x^{p-2} + \ldots + x + 1$, где p — простое число. Натуральное число m таково, что $p \mid m$. Докажите, что любой простой делитель $f(m)$ взаимно прост с $m(m-1)$.

4. Докажите, что для любого простого p число $p^{p+1} + (p+1)^p$ не является точным квадратом.

5. Найдите все тройки простых чисел (p, q, r) такие, что

$$p \mid q^r + 1, \quad q \mid r^p + 1, \quad r \mid p^q + 1.$$

6. Найдите все натуральные числа m и n, для которых $n^m = (n-1)! + 1$.

7. Докажите, что не существует таких натуральных чисел p и n, что p — простое, а уравнение $x(x+1) = p^{2n} y(y+1)$ не имеет решений в натуральных числах.

source:algebra/number-theory/mixture-g10/r1.tex

Добавка по ТЧ

1. Даны натуральные числа a и b такие, что число $(a+1)/b+(b+1)/a$ — натуральное. Докажите, что НОД$(a,b) \leqslant \sqrt{a+b}$.

2. Решите в натуральных числах уравнение $x^2+x^3=2^y+16$.

3. Найдите все пары натуральных чисел (x,n) такие, что x^n+2^n+1 делит $x^{n+1}+2^{n+1}+1$.

source:algebra/number-theory/mixture-g10/r1-more.tex

Изодинамические центры

Точка Ap называется **изодинамическим центром треугольника,** если ее проекции на стороны являются вершинами равностороннего треугольника.

1. **(a)** Дан остроугольный треугольник ABC и его изодинамический центр Ap, лежащий внутри треугольника. Прямые AAp, BAp и CAp повторно пересекают описанную окружность треугольника ABC в точках A_1, B_1 и C_1. Докажите, что треугольник $A_1B_1C_1$ равносторонний.
(b) Сформулируйте и докажите обратное утверждение.

2. Даны числа $k_1, k_2, \ldots, k_n, c$ и точки на плоскости $A_1, A_2, \ldots, A_n$. Докажите, что множество точек X, обладающих тем свойством, что $k_1A_1X^2 + \ldots + k_nA_nX^2 = c$
(a) при $k_1 + \ldots + k_n \neq 0$ является окружностью, точкой или пустым множеством;
(b) при $k_1 + \ldots + k_n = 0$ является прямой, плоскостью или пустым множеством.

Окружность Аполлония ω_A неравнобедренного треугольника ABC — это геометрическое место точек M, для которых $MB : MC = AB : AC$. Аналогично определяются окружности Аполлония ω_B и ω_C.

3. Докажите, что
(a) отрезок, соединяющий основания биссектрис внутреннего и внешнего углов при вершине A, является диаметром окружности Аполлония ω_A;
(b) центр окружности Аполлония ω_A — точка пересечения касательной к описанной окружности в вершине A с прямой BC;
(c) радикальная ось окружности ω_A и описанной окружности треугольника ABC — это симедиана треугольника ABC, проведенная из вершины A.

4. **(a)** Дана точка P и треугольник ABC. Докажите, что стороны педального треугольника, соответствующего точке P, вычисляются по формулам $a \cdot PA/(2R)$, $b \cdot PB/(2R)$, $c \cdot PC/(2R)$. В задаче использованы стандартные обозначения для треугольника ABC.
(b) Выведите из пункта (4a) *теорему Птолемея:*

$$PA \cdot BC + PB \cdot CA \geqslant PC \cdot AB\,,$$

причем равенство достигается только в случае, когда точка P лежит на дуге AB описанной около треугольника ABC окружности.
(c) Докажите, что изодинамический центр принадлежит всем трем окружностям Аполлония.

5. **(a)** Докажите, что три окружности Аполлония имеют общую радикальную ось, проходящую через центр описанной окружности.
(b) Докажите, что изодинамических центра у неравенобедренного треугольника ровно два.
(c) Докажите, что изодинамические центры симметричны (являются инверсными образами друг друга) относительно описанной окружности треугольника ABC.

6. Докажите, что изодинамические центры, центр описанной окружности и точка Лемуана лежат на одной прямой *(ось Брокара треугольника).*

7. **(a)** Пусть Ap — изодинамический центр, лежащий внутри остроугольного треугольника ABC. Каков угол между описанной окружностью треугольника ABC и описанной окружностью треугольника $ApBC$?

(b) Выразите углы $\angle AApB$, $\angle BApC$ и $\angle CApA$ через углы треугольника ABC.

source:geometry/isodynamic-point-g10.tex

Изогональное сопряжение

Определение. Дан треугольник ABC. Две точки P и Q называются *изогонально сопряженными* относительно треугольника ABC, если прямые PA и QA симметричны относительно биссектрисы угла A, прямые PB и QB симметричны относительно биссектрисы угла B, а прямые PC и QC симметричны относительно биссектрисы угла C.

1. **(a)** Докажите, что точка пересечения высот и центр описанной окружности треугольника изогонально сопряжены.
   (b) Какие точки изогонально сопряжены самим себе?
   (c) Касательные к описанной окружности треугольника ABC в точках B и C пересекаются в точке P. Точка Q симметрична точке A относительно середины отрезка BC. Докажите, что P и Q изогонально сопряжены относительно треугольника ABC.
   (d) Докажите, что изогонально сопряжены точка, из которой стороны треугольника видны под углом 120° *(точка Торричелли)* и точка, проекции которой на стороны треугольника образуют равносторонний треугольник *(изодинамический центр треугольника)*.
   (e) Докажите, что изогонально сопряжены точка пересечения медиан треугольника и точка, для которой сумма квадратов расстояний до его сторон минимальна.

2. **(a)** Пусть точки P и Q изогонально сопряжены относительно треугольника ABC. Пусть x, y и z — расстояния от точки P до прямых BC, CA и AB соответственно, а x', y' и z' — расстояния от точки Q до прямых BC, CA и AB соответственно. Докажите, что $x \cdot x' = y \cdot y' = z \cdot z'$.
   (b) Опустим из точки P перпендикуляры на стороны треугольника (или их продолжения) и рассмотрим окружность, проходящую через основания перпендикуляров. Докажите, что эта окружность совпадает с окружностью, построенной таким же образом для точки Q.
   (c) Выведите из пункта (2b), что основания высот треугольника и середины его сторон лежат на одной окружности.

3. **(a)** В окружность вписан шестиугольник $ABCDEF$. Отрезок AC пересекается с отрезком BF в точке X, BE с AD — в точке Y и CE и DF в точке Z. Докажите, что треугольники ABY и EDY подобны, причем точке в треугольнике ABY, изогонально сопряженной точке X, соответствует точка Z в треугольнике EDY.
   (b) Выведите из пункта (3a), что точки X, Y и Z лежат на одной прямой.

4. Докажите, что при изогональном сопряжении окружность, проходящая через вершины B и C, отличная от описанной, переходит в окружность, проходящую через B и C.

5. В трапеции $ABCD$ боковая сторона CD перпендикулярна основаниям, O — точка пересечения диагоналей. На описанной окружности треугольника OCD взята точка S, диаметрально противоположная точке O. Докажите, что $\angle BSC = \angle ASD$.

6. Стороны треугольника ABC видны из точки T под углами 120°. Докажите, что прямые, симметричные прямым AT, BT и CT относительно прямых BC, CA и AB соответственно,

пересекаются в одной точке.

source:geometry/isogonal-conjugate-g10.tex

Разнобой-повторение

1. Точка X вне треугольника ABC такова, что A лежит внутри треугольника BXC. При этом $2\angle XBA = \angle ACB$, $2\angle XCA = \angle ABC$. Докажите, что центры описанной и вневписанной со стороны BC окружностей треугольника ABC и точка X лежат на одной прямой.

2. Найдите внутри треугольника точку с минимальной суммой квадратов расстояний до вершин.

3. Вписанная окружность треугольника ABC касается сторон AB и AC в точках C_1 и A_1 соответственно. Медиана AM пересекает B_1C_1 в точке F. Докажите, что $FI \perp BC$, где I — центр вписанной окружности.

4. Вписанная в треугольник ABC окружность касается сторон BC, CA и AB в точках A_1, B_1 и C_1 соответственно. Через точку A_1 проведена прямая ℓ, перпендикулярная отрезку AA_1. Она пересекается с прямой B_1C_1 в точке X. Докажите, что прямая BC делит отрезок AX пополам.

5. В остроугольном треугольнике ABC точки I_a и I_c — центры вневписанных окружностей, H — основание высоты из вершины B. Прямая I_aH пересекает BC в точке A', а прямая I_cH пересекает AB в точке C'. Докажите, что $A'C'$ проходит через центр вписанной окружности треугольника ABC.

6. В сегмент, ограниченный хордой и дугой AB окружности, вписана окружность ω с центром I. Обозначим середину указанной дуги AB через M, а середину дополнительной дуги через N. Из точки N проведены две прямые, касающиеся ω в точках C и D. Противоположные стороны AD и BC четырехугольника $ABCD$ пересекаются в точке Y, а его диагонали пересекаются в точке X. Докажите, что точки X, Y, I и M лежат на одной прямой.

7. Серединный перпендикуляр к диагонали AC вписанного четырехугольника $ABCD$ пересекает прямые AD и CD в точках P и Q. Докажите, что биссектрисы углов ABC и PBQ совпадают.

8. Четырехугольник $ABCD$ вписан в окружность с центром O и диаметром AC. Касательная в точке C к окружности пересекает прямую BD в точке P. Луч AB пересекает отрезок PO в точке E. Докажите, что $\angle DCE = 90^\circ$.

9. Окружности ω_1 и ω_2 касаются друг друга внешним образом в точке P. Из точки A окружности ω_2, не лежащей на линии центров окружностей, проведены касательные AB, AC к ω_1. Прямые BP, CP вторично пересекают ω_2 в точках E и F. Докажите, что прямая EF, касательная к ω_2 в точке A и общая касательная к окружностям в точке P пересекаются в одной точке.

10. Четырехугольник $ABCD$ вписан в окружность ω. Окружность ω_1 касается прямых AB и CD в точках X и Y и пересекается дугу AD окружности ω в точках K и L. Прямая XY пересекает AC и BD в точках Z и T. Докажите, что K, L, Z и T лежат на одной окружности, касающейся прямых AC и BD.

Глава 4

11-2

Неравенство Йенсена

1. Докажите, что для углов треугольника $\sin(\alpha)+\sin(\beta)+\sin(\gamma) \leqslant 3\sqrt{3}/2$.

2. Выведите из неравенства Йенсена неравенство Коши.

3. Выведите из неравенство Йенсена неравенство между средним гармоническим и средним арифметическим.

4. Выведите из неравенства Йенсена неравенство Гёльдера, т. е. при $k > 1$ и неотрицательных x_i

$$\left(\sum_{i=1}^{n} q_i x_i\right)^k \leqslant \sum_{i=1}^{n} q_i x_i^k, \quad q_1, \ldots, q_n > 0, \quad q_1 + q_2 + \ldots + q_n = 1.$$

5. Докажите, что для углов треугольника $\cos(\alpha)\cdot\cos(\beta)\cdot\cos(\gamma) \leqslant 1/8$.

6. Пусть $x, y, z \in (0; \pi/2)$. Докажите, что
$\dfrac{x\cos(x)+y\cos(y)+z\cos(z)}{x+y+z} \leqslant \dfrac{\cos(x)+\cos(y)+\cos(z)}{3}$.

7. Докажите, что $(1+1/a_1)\cdot(1+1/a_2)\cdot\ldots\cdot(1+1/a_n) \geqslant (n+1)^n$, если сумма положительных чисел $a_1, a_2, \ldots, a_n$ равна 1.

8. Пусть $a, b, c > 0$, $abc \geqslant 1$. Докажите, что
$\left(a+\dfrac{1}{a+1}\right)\left(b+\dfrac{1}{b+1}\right)\left(c+\dfrac{1}{c+1}\right) \geqslant \dfrac{27}{8}$.

9. Пусть I — центр вписанной окружности треугольника ABC. Докажите, что
$IA^2+IB^2+IC^2 \geqslant \dfrac{BC^2+CA^2+AB^2}{3}$.

source:algebra/inequality/jensen-g11r2.tex

Всякие разные неравенства

1. Для положительных чисел $a_1, a_2, \ldots, a_n$ и $b_1, b_2, \ldots, b_n$ докажите неравенство
$$\frac{a_1^2}{b_1} + \frac{a_2^2}{b_2} + \ldots + \frac{a_n^2}{b_n} \geqslant \frac{(a_1 + a_2 + \ldots + a_n)^2}{b_1 + b_2 + \ldots + b_n}.$$

2. Пусть $a, b, c > 0$. Докажите неравенство
$$\frac{a}{b + 2c} + \frac{b}{c + 2a} + \frac{c}{a + 2b} \geqslant 1.$$

3. *Неравенство Чебышёва.* Докажите, что для неотрицательных чисел $a_1 \geqslant a_2 \geqslant \ldots \geqslant a_n$, $b_1 \geqslant b_2 \geqslant \ldots \geqslant b_n$ справедливо неравенство
$$(a_1 + a_2 + \ldots + a_n) \cdot (b_1 + b_2 + \ldots + b_n) \leqslant n \cdot (a_1b_1 + a_2b_2 + \ldots + a_nb_n).$$

4. Докажите, что для положительных чисел a, b, c, d выполнено неравенство
$$\frac{a + b + c + d}{abcd} \leqslant \frac{1}{a^3} + \frac{1}{b^3} + \frac{1}{c^3} + \frac{1}{d^3}.$$

5. Докажите для положительных a, b, c неравенство
$$abc \geqslant (b + c - a) \cdot (c + a - b) \cdot (a + b - c).$$

6. Сумма положительных a, b, c, d равна 4. Докажите, что
$$\frac{a}{b^2 + 1} + \frac{b}{c^2 + 1} + \frac{c}{d^2 + 1} + \frac{d}{a^2 + 1} \geqslant 2.$$

7. Известно, что $a, b, c > 0$, $ab + bc + ca = 3$. Докажите, что
$$\frac{ab}{1 + c^2} + \frac{bc}{1 + a^2} + \frac{ca}{1 + b^2} \geqslant \frac{3}{2}.$$

8. Для положительных чисел $a_1, a_2, \ldots, a_n$ таких, что $a_1 + a_2 + \ldots + a_n = 1$, докажите неравенство
$$\left(a_1 + \frac{1}{a_1}\right)^2 + \left(a_2 + \frac{1}{a_2}\right)^2 + \ldots + \left(a_n + \frac{1}{a_n}\right)^2 \geqslant \frac{(n^2 + 1)^2}{n}.$$

9. Пусть $a, b, c > 0$. Докажите неравенство
$$\frac{a^3}{a^2 + ab + b^2} + \frac{b^3}{b^2 + bc + c^2} + \frac{c^3}{c^2 + ca + c^2} \geqslant \frac{a + b + c}{3}.$$

10. Сумма положительных чисел a, b, c, d равна 4. Докажите, что
$$\frac{a}{a^3 + 4} + \frac{b}{b^3 + 4} + \frac{c}{c^3 + 4} + \frac{d}{d^3 + 4} \leqslant \frac{4}{5}.$$

`source:algebra/inequality/mixture-g11r2.tex`

Теорема Безу. Вокруг да около

1. Найдите остатки от деления многочлена $x^{81} + x^{27} + x^9 + x^3 + 1$ на
(a) $(x - 1)$; **(b)** $(x^2 - 1)$; **(c)** $(x^2 + 1)$; **(d)** $(x - 1)^2$.

2. Многочлен $P(x)$ при делении на $(x - 1)$ дает остаток 2, а при делении на $(x - 2)$ дает остаток 1. Какой остаток дает $P(x)$ при делении на $(x - 1)(x - 2)$?

3. Многочлен $P(x)$ при делении на $(x^2 - 4)$ дает остаток $x + 1$, а на $x^2 - 1$ — остаток $x + 2$. Найдите остаток при делении $P(x)$ на $(x^2 - 4)(x^2 - 1)$.

4. Докажите, что если значения двух многочленов, степени которых не превосходят n, совпадают в $n + 1$ различных точках, то эти многочлены равны.

5. Дан многочлен $P(x)$ такой, что многочлен $P(x^n)$ делится на $(x - 1)$. Докажите, что многочлен $P(x)$ также делится на $(x - 1)$.

6. Известно, что многочлен $x^n + x + 1$ делится на $x^2 + x + 1$. Используя формулу Муавра, докажите, что n есть число вида $3k + 2$.

7. Многочлен $P(x^3)$ делится на многочлен $x^2 + x + 1$. Используя комплексные числа, докажите, что многочлен $P(x)$ делится на многочлен $(x - 1)$.

8. При каких n многочлен $1 + x^2 + x^4 + \ldots + x^{2n-2}$ делится на $1 + x + x^2 + \ldots + x^{n-1}$?

source:algebra/polynomial/bezouts-theorem-g11r2.tex

Производные

1. Докажите, что уравнение $4x^3 - 3bx^2 + 2cx - d = 0$ имеет 3 действительных корня тогда и только тогда, когда существует действительные числа m, n, p, q такие, что

$$\begin{cases} b = m + n + p + q, \\ c = mn + mp + mq + np + nq + pq, \\ d = mnp + mnq + mpq + npq. \end{cases}$$

2. Многочлен четвертой степени $P(x)$ имеет четыре корня, попарные расстояния между которыми не меньше 1. Докажите, что найдутся два корня $P'(x)$, находящиеся на расстоянии не меньше 1.

3. Найдите все действительные a и b такие, что уравнение $x^3 + ax^2 + bx + c = 0$ имеет не более двух положительных корней при всех значениях c.

4. Сколько существует многочленов вида $x^3 + ax^2 + bx + c$ таких, что множество их корней есть $\{a, b, c\}$?

5. Докажите, что при целых значениях c уравнение $x \cdot (x^2 - 1) \cdot (x^2 - 10) = c$ не может иметь пяти целых корней.

6. Докажите, что если все корни многочлена с действительными коэффициентами $P(x) = a_n x^n + \ldots + a_0$ действительны, то и все его производные имеют лишь действительные корни.

7. Пусть $P(x)$ — многочлен степени n и $P(a) \geqslant 0$, $P'(a) \geqslant 0$, …, $P^{(n-1)}(a) \geqslant 0$, $P^{(n)}(a) > 0$. Докажите, что действительные корни уравнения $P(x) = 0$ не превосходят a.

8. Докажите, что многочлен $P(x) = 1 + x + x^2/2! + \ldots + x^n/n!$ не имеет кратных корней.

9. Пусть $c_0 + c_1/2 + \ldots + c_n/(n+1) = 0$. Докажите, что многочлен $c_0 + c_1 x + c_2 x^2 + \ldots + c_n x^n$ имеет хотя бы один действительный корень.

source:algebra/polynomial/derivative-g11.tex

Многочлены с целыми коэффициентами

1. Пусть $f(x)$ — многочлен с целыми коэффициентами. Известно, что $f(-1) = f(0) = f(1) = 0$. Докажите, что $f(n)$ кратно трем для любого целого n.

2. Многочлен $P(x)$ таков, что $P(7) = 11$, а $P(11) = 13$. Докажите, что хотя бы один из его коэффициентов — не целое число.

3. Пусть $f(x)$ — многочлен с целыми коэффиентами. Докажите, что $f(a) - f(b)$ делится на $(a - b)$, где a, b — различные целые числа.

4. Все коэффициенты многочлена $P(x)$ — целые числа. Известно, что $P(1) = 1$ и что $P(n) = 0$ при некотором натуральном n. Найдите n.

5. Дан многочлен с целыми коэффициентами. Если в него вместо неизвестного подставить 2 или 3, то получаются числа, кратные 6. Докажите, что если вместо неизвестного в него подставить 5, то также получится число, кратное 6.

6. $P(x)$ — многочлен с целыми коэффициентами. Докажите, что если уравнение $P(x) = 1$ имеет больше трех целочисленных корней, то уравнение $P(x) = -1$ не имеет целочисленных корней.

7. Многочлен $f(x)$ с целыми коэффициентами принимает значение 5 при пяти различных целых значениях x. Может ли $f(x)$ иметь целые корни? Может ли $f(n)$ равняться -6 при целом n?

8. Многочлен седьмой степени с целыми коэффициентами в семи целых точках принимает значения ± 1. Докажите, что этот многочлен нельзя разложить в произведение двух многочленов с целыми коэффициентами.

9. Многочлены $P(x)$ и $Q(x)$ с целыми коэффициентами таковы, что $P(k)$ делится на $Q(k)$ при любом целом k. Докажите, что $P(x)$ делится на $Q(x)$.

10. Пусть $a_1, a_2, \ldots, a_n$ — различные целые числа. Докажите, что многочлен $(x - a_1)(x - a_2) \ldots (x - a_n) - 1$ нельзя разложить в произведение двух многочленов ненулевой степени с целыми коэффициентами.

source:algebra/polynomial/integer-g11r2.tex

Симметрические многочлены и системы

1. Определите все значения параметра a, при каждом из которых три различных корня уравнения $x^3 + (a^2 - 9a)x^2 + 8ax - 64 = 0$ образуют геометрическую прогрессию. Найдите эти корни.

2. При каких значениях a четыре корня уравнения $x^4 + (a-5)x^2 + (a+2)^2 = 0$ являются последовательными членами арифметической прогрессии?

3. Пусть известно, что все корни некоторого уравнения $x^3+px^2+qx+r = 0$ положительны. Какому дополнительному условию должны удовлетворять его коэффициенты p, q и r для того, чтобы из отрезков, длины которых равны этим корням, можно было составить треугольник?

4. **(a)** Пусть a, b, c — стороны треугольника, p — его полупериметр, а r и R — радиусы вписанной и описанной окружностей соответственно. Составьте уравнение с коэффициентами, зависящими от p, r, R, корнями которого являются числа a, b, c.
(b) Докажите равенство $1/(ab) + 1/(ac) + 1/(bc) = 1/(2rR)$.

5. Длины сторон треугольника являются корнями кубического уравнения с рациональными коэффициентами. Докажите, что длины высот треугольника являются корнями уравнения шестой степени с рациональными коэффициентами.

6. Числа x, y, z удовлетворяют системе
$$\begin{cases} x + y + z = a\,, \\ 1/x + 1/y + 1/z = 1/a\,. \end{cases}$$
Докажите, что хотя бы одно из этих чисел равно a.

7. Пусть a, b, c — три различных числа. Решите систему
$$\begin{cases} z + ay + a^2x + a^3 = 0\,, \\ z + by + b^2x + b^3 = 0\,, \\ z + cy + c^2x + c^3 = 0\,. \end{cases}$$

8. Выражение $x^{2009} + y^{2009}$ выразили через $\sigma_1 = x + y$, $\sigma_2 = xy$, получили многочлен $g(\sigma_1, \sigma_2)$. Найдите сумму коэффициентов этого многочлена.

9. Назовем многочлен *средиземноморским*, если он имеет только действительные корни и имеет вид
$$P(x) = x^{10} - 20x^9 + 135x^8 + \\ + a_7x^7 + a_6x^6 + a_5x^5 + a_4x^4 + a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0\,.$$
Коэффициенты a_0, ..., a_7 — действительные числа. Найдите наибольшее действительное число, которое может быть корнем средиземноморского многочлена.

source:algebra/polynomial/symmetric-g11r2.tex

Теоретический минимум

Теорема Безу. Остаток при делении многочлена $P(x)$ на $(x-a)$ равен $P(a)$.

Теорема Эйзенштейна. Рассмотрим многочлен с целыми коэффициентами $P(x) = a_nx^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_2x^2 + a_1x + a_0$. Пусть a_n не делится на простое p; пусть a_0, …, a_{n-1} делится на p; пусть a_0 не делится на p^2. Тогда многочлен $P(x)$ неприводим, т. е. его нельзя разложить в произведение двух многочленов ненулевой степени с целыми коэффициентами.

Теорема Вильсона. Число p простое тогда и только тогда, когда $(p-1)!+1$ делится на p.

Малая теорема Ферма. Пусть p — простое, $(a,p)=1$. Тогда $a^{p-1} \equiv 1 \pmod p$.

Теорема Эйлера. Пусть $(a,m)=1$. Тогда $a^{\varphi(m)} \equiv 1 \pmod m$.

Для простого p и натурального n обозначим за $\operatorname{ord}_p(n)$ степень, в которой число p входит в разложение числа n на простые множители.

Лемма об уточнении показателя. Пусть a, b — различные целые числа, k — натуральное, p — нечетное простое, являющееся делителем $(a-b)$ и не являющееся делителем a. Тогда

$$\operatorname{ord}_p(a^k - b^k) = \operatorname{ord}_p(a-b) + \operatorname{ord}_p(k)\,.$$

Если $p=2$, то, кроме уже описанных условий, должно быть выполнено условие, что $(x-y)$ делится на 4.

Неравенство Коши. Для всех неотрицательных чисел a_1, a_2, …, a_n имеет место неравенство

$$\frac{a_1 + a_2 + \ldots + a_n}{n} \geqslant \sqrt[n]{a_1 \cdot a_2 \cdot \ldots \cdot a_n}\,.$$

Неравенство Коши–Буняковского. Для действительных чисел $x_1, x_2, \ldots, x_n, y_1, y_2, \ldots, y_n$ имеет место неравенство

$$(x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_n^2)\cdot(y_1^2 + y_2^2 + \ldots + y_n^2) \geqslant (x_1y_1 + x_2y_2 + \ldots + x_ny_n)^2\,.$$

Неравенство Шура. Пусть x, y, z — неотрицательные действительные числа. Тогда для любого r верно неравенство

$$x^r(x-y)(x-z) + y^r(y-x)(y-z) + z^r(z-x)(z-y) \geqslant 0\,.$$

Транснеравенство. Пусть $a_1 \leqslant a_2 \leqslant \ldots \leqslant a_n$ и $b_1 \leqslant b_2 \leqslant \ldots \leqslant b_n$. Тогда имеет место неравенство

$$a_1b_n + a_2b_{n-1} + \ldots + a_nb_1 \leqslant a_1c_1 + a_2c_2 + \ldots + a_nc_n \leqslant a_1b_1 + a_2b_2 + \ldots + a_nb_n\,,$$

если $_1$, c_2, …, c_n — произвольная перестановка чисел b_1, b_2, …, b_n.

Неравенство Йенсена. Пусть $f(x)$ —непрерывно дифференцируемая выпуклая функция на отрезке $[a; b]$, $x_1, x_2, \ldots, x_n \in [a; b]$. Тогда

$$\frac{f(x_1) + f(x_2) + \ldots + f(x_n)}{n} \geqslant f\left(\frac{x_1 + x_2 + \ldots + x_n}{n}\right).$$

Формула Муавра. Пусть $z = r \cdot \big(\cos(\varphi) + \mathrm{i}\sin(\varphi)\big)$; n — натуральное. Тогда

$$z^n = r^n \cdot \big(\cos(n\varphi) + \mathrm{i}\sin(n\varphi)\big).$$

source:algebra/theory-g11r2.tex

Числа Каталана

Последовательность $\{c_n\}$, заданная рекуррентным соотношением

$$c_0 = c_1 = 1\,, \quad c_{n+1} = c_0c_n + c_1c_{n-1} + \ldots + c_nc_0\,,$$

называется последовательностью *чисел Каталана*. Вот первые члены этой последовательности: 1, 1, 2, 5, 14, …

В следующих задачах задачах нужно доказать (по индукции или, что лучше, построив комбинаторную биекцию с чем-нибудь уже известным), что c_n — это число

1. *Триангуляций* выпуклого $(n+2)$-угольника: разрезаний на n треугольников непересекающимися диагоналями.

2. *Неассоциативных произведений* $n+1$ букв: способов расставить скобки так, чтобы порядок умножений был однозначно определен. Например, для $n=3$:

$$a(b(cd)) \quad (ab)(cd) \quad ((ab)c)d \quad a((bc)d) \quad (a(bc))d$$

3. *Путей* из точки $(0,0)$ в точку (n,n) по линиям клетчатой бумаги, идущих вверх и вправо, не поднимающихся выше прямой $y=x$.

4. *Последовательностей* длины $2n$, в которых n раз встречается 1, n раз встречается -1, и все частичные суммы последовательности неотрицательны.

5. *Способов соединить* $2n$ точек на окружности n непересекающимися хордами (из любой точки выходит одна хорда).

6. *Плоских корневых двоичных деревьев* с n вершинами: у каждой вершины не более двух сыновей (правый и левый) и один предок (кроме корня, у которого нет предков).

7. *Параллеломино* периметра $2n+2$: пар путей на клетчатой бумаге с началом $(0,0)$ и концом в одной и той же точке, идущих только вверх и вправо и не имеющих общих точек, кроме начала и конца.

8. *Путей* из точки $(0,0)$ в точку $(n-1,n-1)$, идущих вправо, вверх или по диагонали вправо вверх, не поднимающихся выше прямой $y=x$ и таких, что идти по диагонали можно только вдоль прямой $y=x$.

9. *Перестановок чисел* $1, 2, \ldots, n$, у которых длина каждой убывающей подпоследовательности не более 2. Например, для $n=3$:

123 213 132 312 231

10. *Способов разбить* все натуральные числа от 1 до n на несколько незацепленных групп (нельзя при $a<b<c<d$ отнести a и c к одной группе, а b и d — к другой). Например, для $n=3$:

123 12, 3 13, 2 1, 23 1, 2, 3

11. Докажите явную формулу для чисел этой последовательности:

$$c_n = \frac{(2n)!}{n!\,(n+1)!}\,.$$

source:combinatorics/catalan-numbers-g11/r2.tex

Diamond lemma

1. В дереве бесконечное число вершин, а степень каждой вершины конечная. Докажите, что можно выбрать простой путь, состоящий из бесконечного множества вершин.

2. **Diamond lemma.** Дан ориентированный граф с
(a) конечным; **(b)** бесконечным
множеством вершин. Будем называть вершину v *потомком* вершины u, если существует путь из u в v; если есть ребро из u в v, то v — *ребёнок* u. Известно, что все пути в графе конечны (в частности, нет циклов) и что выполнено следующее условие: для любых двух детей любой вершины у этих детей существует общий потомок. Докажите, что у любой вершины есть лишь один потомок исходящей степени 0.

В дальнейших задачах этой леммой можно пользоваться без доказательства.

3. На доске выписаны положительные числа $a_1, a_2, \ldots, a_n$. За ход разрешается взять любые два числа x и y и заменить их значением выражения $xy+x+y$. Докажите, что финальное число не зависит от порядка операций.

4. В алфавите имеется n букв и n соответствующим им антибукв. Выписано слово этого алфавита. Каждый квант времени из слова удаляются случайно выбранные рядом стоящие буква и её антибуква (в любом порядке) до тех пор, пока не остаётся несократимое слово. Докажите, что результат не зависит от хода процесса.

5. На доске выписаны натуральные числа $a_1, a_2, \ldots, a_n$. За ход разрешается взять пару чисел, ни одно из которых не делится на второе, и заменить их на их НОД и НОК.
(a) Докажите, что как бы мы ни действовали, мы не сможем проворачивать эту операцию бесконечно много раз.
(b) Докажите, что как бы мы ни действовали, мы закончим одним и тем же множеством чисел.

6. В ряд стоит 100 коробок, в самой левой из них лежит 100 спичек. За ход разрешается из любой коробки переложить одну спичку в соседнюю справа коробку, при условии, что в исходной коробке останется не меньше спичек, чем получится в той, куда спичку мы добавили. Докажите, что результат процесса не зависит от порядка операций.

source:combinatorics/diamond-lemma-g11.tex

Разнобой

1. Волейбольная сетка состоит из 50 вертикальных и 300 горизонтальных клеток. Какое наибольшее количество веревочек между узлами можно перерезать так, чтобы сетка не развалилась?
2. В графе 16 вершин, степень каждой вершины равна 6. У любых двух вершин ровно два общих соседа. Сколько в этом графе циклов длины 3?
3. Чтобы отвести на завтрак, 100 детей построили парами. На обратном пути из столовой их снова построили парами, возможно, составленными по-другому. При каком наибольшем n наверняка можно выбрать n детей, никакие два из них не были в одной паре?
4. Существует ли такой граф, у которого ровно два остовных дерева?
5. В классе 21 ученик. У всех, кроме Кости, разное число друзей в классе. Сколько друзей могло быть у Кости?
6. В связном графе ребра покрашены в два цвета так, что из каждой вершины выходит поровну рёбер двух цветов. Докажите, что из любой вершины в любую существует путь, цвета ребер которого чередуются.
7. На турнир приехали 100 человек. Известно, что среди любых 50 из них есть человек, знакомый с остальными 49. Для какого наибольшего k можно утверждать, что в этой компании найдутся k человек, знакомых друг с другом?
8. В деревне Сплетня 100 жителей. У каждого жителя не менее трех друзей среди остальных. В первый день один из жителей узнал интереснейшую новость и тут же поделился ей со своими друзьями. Каждый узнающий на следующий день тоже делился новостью с остальными своими друзьями. Известно, что когда-то новость узнали все. А через какое наибольшее количество дней это впервые могло случиться?
9. Вершины выпуклого многогранника можно обойти одним циклическим маршрутом. Докажите, что грани можно правильным образом покрасить в 4 цвета.

source:combinatorics/graph/mixture-g11/r2.tex

Конечное и беконечное

1. **(a)** Существует ли такое бесконечное множество натуральных чисел, что любые 99 его элементов имеют общий делитель, а любые 100 взаимно простые?
(b) В бесконечном множестве натуральных чисел у любого конечного подмножества есть общий делитель, больший единицы. Обязательно ли у всех чисел есть общий делитель, больший единицы?

2. Есть счетное число функций $f_i\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Докажите, что существует функция g такая, что она больше любой функции f_i начиная с некоторого момента x_i, возможно, зависящего от i.

3. Можно ли
(a) конечным **(b)** бесконечным
множеством внутренностей углов с суммой градусных мер 1° покрыть плоскость?

4. *Плотностью* арифметической прогрессии $a_n = kn + b, n \in \mathbb{Z}, k > 0$ назовем число $1/k$. Можно ли разбить все целые числа на
(a) конечное **(b)** бесконечное
число прогрессий с суммой плотностей меньше единицы?

5. Есть бесконечная последовательность прямоугольников, площадь k-го равна k^2. Всегда ли ими можно покрыть плоскость? (Прямоугольники можно как угодно переносить и поворачивать).

6. Каждая точка плоскости с целыми координатами покрашена в один из десяти цветов. Докажите, что найдется прямоугольник с одноцветными вершинами.

7. **(a)** Дана счетная последовательность действительных чисел, все числа различны. Докажите, что можно выбрать либо бесконечную последовательность возрастающих чисел, либо бесконечную последовательность убывающих чисел.
(b) Все пары натуральных чисел покрасили в два цвета. Докажите, что можно выбрать бесконечное множество натуральных чисел, все пары которого покрашены в один цвет.

source:combinatorics/infinity-g11r2.tex

Разнобой по комбинаторике

1. У Ивана есть 3 куска хлеба, 4 сыра и 7 колбасы. Сколькими способами он может сделать бутерброд так, чтобы

(a) никакие два куска колбасы не лежали рядом;

(b) никакие два одинаковых продукта не находились рядом?

2. В клетках шахматной доски расставлены плюс и минус единицы. Оказалось, что любые два соседних столбца либо равны, либо противоположны. Докажите, что для строчек выполняется аналогичное условие.

3. В марсианском алфавите k букв. Два слова называются *похожими,* если в них поровну букв и они отличаются ровно одной буквой (в одном разряде, например: ТРУКС и ТРИКС). Докажите, что все слова можно разбить на k групп так, чтобы в одной группе не было похожих слов.

4. На плоскости отмечено несколько точек, не лежащих на одной прямой, и около каждой написано число. Для любой прямой, проходящей через две или более отмеченных точек, сумма всех чисел, написанных около этих точек, равна 0. Докажите, что все числа равны 0.

5. Последовательность натуральных чисел $\{a_n\}$ обладает тем свойством, что для любого k в ней содержится ровно k делителей числа k. Докажите, что в ней содержится любое натуральное число хотя бы один раз.

source:combinatorics/mixture-g11/r2.tex

Глава 5

11-1

Производные

1. Докажите, что уравнение $4x^3-3bx^2+2cx-d=0$ имеет 3 действительных корня тогда и только тогда, когда существует действительные числа m, n, p, q такие, что

$$\begin{cases} b = m+n+p+q, \\ c = mn+mp+mq+np+nq+pq, \\ d = mnp+mnq+mpq+npq. \end{cases}$$

2. Многочлен четвертой степени $P(x)$ имеет четыре корня, попарные расстояния между которыми не меньше 1. Докажите, что найдутся два корня $P'(x)$, находящиеся на расстоянии не меньше 1.

3. Найдите все действительные a и b такие, что уравнение $x^3+ax^2+bx+c=0$ имеет не более двух положительных корней при всех значениях c.

4. Сколько существует многочленов вида x^3+ax^2+bx+c таких, что множество их корней есть $\{a, b, c\}$?

5. Докажите, что при целых значениях c уравнение $x\cdot(x^2-1)\cdot(x^2-10)=c$ не может иметь пяти целых корней.

6. Докажите, что если все корни многочлена с действительными коэффициентами $P(x) = a_nx^n+\ldots+a_0$ действительны, то и все его производные имеют лишь действительные корни.

7. Пусть $P(x)$ — многочлен степени n и $P(a)\geqslant 0$, $P'(a)\geqslant 0$, ..., $P^{(n-1)}(a)\geqslant 0$, $P^{(n)}(a)>0$. Докажите, что действительные корни уравнения $P(x)=0$ не превосходят a.

8. Докажите, что многочлен $P(x)=1+x+x^2/2!+\ldots+x^n/n!$ не имеет кратных корней.

9. Пусть $c_0+c_1/2+\ldots+c_n/(n+1)=0$. Докажите, что многочлен $c_0+c_1x+c_2x^2+\ldots+c_nx^n$ имеет хотя бы один действительный корень.

source:algebra/polynomial/derivative-g11.tex

Прямая Симсона

Прямая Симсона. Рассмотрим треугольник ABC и произвольную точку P. Основания перпендикуляров из точки P на прямые AB, AC, BC лежат на одной прямой тогда и только тогда, когда точка P лежит на описанной окружности треугольника ABC.

1. Пусть AA_1, BB_1, CC_1 — высоты остроугольного треугольника ABC. Докажите, что основания перпендикуляров из точки A_1 на прямые AB, AC, BB_1, CC_1 лежат на одной прямой.

2. Две окружности пересекаются в точках A и B. Через точку A проходит прямая, пересекающая окружности в точках C и D. Точки P и Q — проекции точки B на касательные к окружностям, проведенным в точках C и D. Докажите, что прямая PQ касается окружности, построенной на AB как на диаметре.

3. В треугольнике ABC угол A равен 60°. Пусть BB_1 и CC_1 — биссектрисы. Докажите, что точка, симметричная A относительно B_1C_1, лежит на прямой BC.

4. В треугольнике ABC провели биссектрису AA_1, из точки A_1 опустили перпендикуляры A_1X и A_1Y на стороны AB и AC соответственно. На отрезке XY выбрана точка M так, что $MA_1 \perp BC$. Докажите, что точка M лежит на медиане треугольника ABC, проведенной из вершины A.

5. В треугольнике ABC из произвольной точки P дуги BC описанной окружности треугольника ABC опущены перпендикуляры PX и PY на стороны AB и BC. Пусть M и N — середины отрезков AC и XY. Докажите, что $\angle MNP = 90^\circ$.

6. Пусть H — ортоцентр треугольника ABC, P — произвольная точка на описанной окружности ABC. Докажите, что прямая Симсона точки P делит отрезок PH пополам.

7. **(a)** Точка P движется по описанной окружности треугольника ABC. Докажите, что при этом прямая Симсона точки P относительно треугольника ABC поворачивается на угол, равный половине угловой величины дуги, пройденной точкой P.

   (b) Докажите, что прямые Симсона двух диаметрально противоположных точек описанной окружности треугольника ABC перпендикулярны, а их точка пересечения лежит на окружности Эйлера.

8. **(a)** Докажите, что на описанной окружности треугольника существует ровно три точки таких, что их прямая Симсона касается окружности Эйлера, причем они образуют равносторонний треугольник.
   (b) *Теорема Морлея.* В треугольнике ABC провели трисектрисы углов. Пусть A_1 — точка пересечения ближайших к стороне BC трисектрис углов B и C. Аналогично определяются точки B_1 и C_1. Докажите, что треугольник $A_1B_1C_1$ правильный, а $\angle AB_1C_1 = 60^\circ + \angle C/3$.
   (c) Докажите, что на описанной окружности треугольника ABC найдется три точки таких, что их прямые Симсона касаются окружности Эйлера, причем эти точки образуют правильный треугольник, стороны которого параллельны сторонам треугольника Морлея.

9. Дан фиксированный треугольник ABC. Пусть D — произвольная точка в плоскости треугольника, не совпадающая с его вершинами. Окружность с центром в D, проходящая через A, пересекает вторично прямые AB и AC в точках A_b и A_c соответственно. Аналогично определяются точки B_a, B_c, C_a и C_b. Точку D назовем хорошей, если точки A_b, A_c, B_a, B_c, C_a и C_b лежат на одной окружности. Сколько может оказаться точек, хороших для данного треугольника ABC?

source:geometry/simson-line-g11r1.tex

Числа Каталана

Последовательность $\{c_n\}$, заданная рекуррентным соотношением

$$c_0 = c_1 = 1\,, \quad c_{n+1} = c_0c_n + c_1c_{n-1} + \ldots + c_nc_0\,,$$

называется последовательностью *чисел Каталана*. Вот первые члены этой последовательности: 1, 1, 2, 5, 14, …

1. Докажите явную формулу для чисел этой последовательности:

$$c_n = \frac{(2n)!}{n!\,(n+1)!}\,.$$

2. Докажите, что для любой последовательности $(x_1, \ldots, x_n)$ целых чисел, сумма которых равна 1, ровно у одного из ее циклических сдвигов все частичные суммы положительные.

В следующих задачах задачах нужно доказать (по индукции или, что лучше, построив комбинаторную биекцию с чем-нибудь уже известным), что c_n — это число

3. *Триангуляций* выпуклого $(n+2)$-угольника: разрезаний на n треугольников непересекающимися диагоналями.

4. *Неассоциативных произведений* $n+1$ букв: способов расставить скобки так, чтобы порядок умножений был однозначно определен. Например, для $n = 3$:

$$a(b(cd)) \quad (ab)(cd) \quad ((ab)c)d \quad a((bc)d) \quad (a(bc))d$$

5. *Путей* из точки $(0,0)$ в точку (n,n) по линиям клетчатой бумаги, идущих вверх и вправо, не поднимающихся выше прямой $y = x$.

6. *Последовательностей* длины $2n$, в которых n раз встречается 1, n раз встречается -1, и все частичные суммы последовательности неотрицательны.

7. *Способов соединить* $2n$ точек на окружности n непересекающимися хордами (из любой точки выходит одна хорда).

8. *Плоских корневых двоичных деревьев* с n вершинами: у каждой вершины не более двух сыновей (правый и левый) и один предок (кроме корня, у которого нет предков).

9. *Параллеломино* периметра $2n+2$: пар путей на клетчатой бумаге с началом $(0,0)$ и концом в одной и той же точке, идущих только вверх и вправо и не имеющих общих точек, кроме начала и конца.

10. *Путей* из точки $(0,0)$ в точку $(n-1, n-1)$, идущих вправо, вверх или по диагонали вправо вверх, не поднимающихся выше прямой $y = x$ и таких, что идти по диагонали можно только вдоль прямой $y = x$.

11. *Перестановок чисел* $1, 2, \ldots, n$, у которых длина каждой убывающей подпоследовательности не более 2. Например, для $n = 3$:

$$123 \quad 213 \quad 132 \quad 312 \quad 231$$

12. *Способов разбить* все натуральные числа от 1 до n на несколько незацепленных групп (нельзя при $a < b < c < d$ отнести a и c к одной группе, а b и d — к другой). Например, для $n = 3$:

$$123 \quad 12,3 \quad 13,2 \quad 1,23 \quad 1,2,3$$

source:combinatorics/catalan-numbers-g11/r1.tex

Diamond lemma

1. В дереве бесконечное число вершин, а степень каждой вершины конечная. Докажите, что можно выбрать простой путь, состоящий из бесконечного множества вершин.

2. **Diamond lemma.** Дан ориентированный граф с
(a) конечным; **(b)** бесконечным
множеством вершин. Будем называть вершину v *потомком* вершины u, если существует путь из u в v; если есть ребро из u в v, то v — *ребёнок* u. Известно, что все пути в графе конечны (в частности, нет циклов) и что выполнено следующее условие: для любых двух детей любой вершины у этих детей существует общий потомок. Докажите, что у любой вершины есть лишь один потомок исходящей степени 0.

В дальнейших задачах этой леммой можно пользоваться без доказательства.

3. На доске выписаны положительные числа $a_1, a_2, \ldots, a_n$. За ход разрешается взять любые два числа x и y и заменить их значением выражения $xy+x+y$. Докажите, что финальное число не зависит от порядка операций.

4. В алфавите имеется n букв и n соответствующим им антибукв. Выписано слово этого алфавита. Каждый квант времени из слова удаляются случайно выбранные рядом стоящие буква и её антибуква (в любом порядке) до тех пор, пока не остаётся несократимое слово. Докажите, что результат не зависит от хода процесса.

5. На доске выписаны натуральные числа $a_1, a_2, \ldots, a_n$. За ход разрешается взять пару чисел, ни одно из которых не делится на второе, и заменить их на их НОД и НОК.
(a) Докажите, что как бы мы ни действовали, мы не сможем проворачивать эту операцию бесконечно много раз.
(b) Докажите, что как бы мы ни действовали, мы закончим одним и тем же множеством чисел.

6. В ряд стоит 100 коробок, в самой левой из них лежит 100 спичек. За ход разрешается из любой коробки переложить одну спичку в соседнюю справа коробку, при условии, что в исходной коробке останется не меньше спичек, чем получится в той, куда спичку мы добавили. Докажите, что результат процесса не зависит от порядка операций.

source:combinatorics/diamond-lemma-g11.tex

Разнобой

1. В графе 16 вершин, степень каждой вершины равна 6. У любых двух вершин ровно два общих соседа. Сколько в этом графе циклов длины 3?

2. В классе 21 ученик. У всех, кроме Кости, разное число друзей в классе. Сколько друзей могло быть у Кости?

3. В связном графе ребра покрашены в два цвета так, что из каждой вершины выходит поровну рёбер двух цветов. Докажите, что из любой вершины в любую существует путь, цвета ребер которого чередуются.

4. В деревне Сплетня 100 жителей. У каждого жителя не менее трех друзей среди остальных. В первый день один из жителей узнал интереснейшую новость и тут же поделился ей со своими друзьями. Каждый узнающий на следующий день тоже делился новостью с остальными своими друзьями. Известно, что когда-то новость узнали все. А через какое наибольшее количество дней это впервые могло случиться?

5. Вершины выпуклого многогранника можно обойти одним циклическим маршрутом. Докажите, что грани можно правильным образом покрасить в 4 цвета.

6. Степень каждой вершины графа не превосходит n, при этом среди любых m вершин есть две соединенные ребром. При каком наибольшем числе вершин такое возможно?

7. В стране 120 городов. Некоторые пары городов соединены дорогами, не проходящими через другие города. Из каждого города выходит хотя бы три дороги. Докажите что существует несамопересекающийся циклический маршрут состоящий не более чем из 11 городов.

8. В графе E ребер и T треугольников. Докажите, что $9T^2 \leqslant 2E^3$.

source:combinatorics/graph/mixture-g11/r1.tex

Лемма Кёнига и прочее бесконечное

1. **(a)** Существует ли такое бесконечное множество натуральных чисел, что любые 99 его элементов имеют общий делитель, а любые 100 — взаимно простые?
(b) В бесконечном множестве натуральных чисел у любого конечного подмножества есть общий делитель, больший единицы. Обязательно ли у всех чисел есть общий делитель, больший единицы?

2. *Задача отозвана.* ~~Можно ли написать в клетки бесконечного клетчатого листа целые числа так, чтобы в каждой строчке и каждом столбце каждое число встречалось по одному разу?~~

3. *Счётная теорема Рамсея.*
(a) Дано счетное множество людей. Обязательно ли среди них есть бесконечно много попарно знакомых или бесконечно много попарного незнакомых?
(b) Все пары натуральных чисел покрасили в 50 цветов. Обязательно ли можно выбрать бесконечное множество натуральных чисел, все пары которого покрашены в один цвет?
(c) Все тройки натуральных чисел…

А теперь пришла пора применять заглавную лемму…

4. Допустим, любую конечную карту можно правильно покрасить в 4 цвета. Выведите из этого, что бесконечную карту можно покрасить в 4 цвета.

5. *Счётная теорема Брукса.* В графе со счетным числом вершин степень каждой вершины не более 17. Докажите, что вершины можно правильным образом покрасить в 17 цветов.

6. *Счётная лемма Холла.* Дано бесконечное множество юношей и бесконечное множество девушек. Каждому юноше нравится конечное количество девушек. Оказалось, что любым k юношам суммарно нравится не менее k девушек. Докажите, что можно всем юношам одновременно выбрать пару (то есть каждому выбрать нравящуюся ему девушку, так чтобы разным юношам соответствовали разные девушки).

7. Выведите из бесконечной теоремы Рамсея конечную. То есть докажите, что для любого натурального k и любого натурального n существует такое число $R_{k,n}$, что при любой покраске ребер полного графа на $R_{k,n}$ вершинах в k цветов найдется одноцветный полный подграф на n вершинах.

8. В алфавите конечное количество букв. *Словом* назовем любую последовательность букв. Пусть некоторые слова объявлены запретными. При этом, если у слова есть запрещенные подслова, то оно тоже запрещенное. Оказалось, что любое бесконечное слово запрещенное. Докажите, что незапрещенных слов конечное число.

9. В алфавите конечное количество букв. Словом назовем любую конечную последовательность букв. В языке некоторые слова запрещенные. При этом, если подслово слова запрещенное, то само слово тоже запрещенное. Безумный профессор пишет слова на доске. При этом каждую минуту он меняет текущее слово w на слово wAw, где A — произвольное слово (вообще говоря, разное для разных действий). Оказалось, что с какого бы слова профессор не начал свои манипуляции, рано или поздно он получит на доске запрещенное слово. Докажите, что незапрещенных слов конечное количество.

10. Все натуральные числа покрасили в несколько цветов. Докажите,что найдется цвет такой, что для любого натурального n бесконечно много чисел этого цвета делится на n.

11. Натуральные числа покрашены в несколько цветов. Докажите, что можно выбрать один из цветов и натуральное m так, что для любого N существуют N чисел $a_1 < a_2 < \ldots < a_N$ этого цвета такие, что $a_{i+1} < a_i + m$ для любого i.

source:combinatorics/infinity-and-konig-g11r1.tex

Разнобой по комбинаторике

1. В марсианском алфавите k букв. Два слова называются *похожими,* если в них поровну букв и они отличаются ровно одной буквой (в одном разряде, например: ТРУКС и ТРИКС). Докажите, что все слова можно разбить на k групп так, чтобы в одной группе не было похожих слов.

2. На плоскости отмечено несколько точек, не лежащих на одной прямой, и около каждой написано число. Для любой прямой, проходящей через две или более отмеченных точек, сумма всех чисел, написанных около этих точек, равна 0. Докажите, что все числа равны 0.

3. Сколько существует перестановок из n элементов, не имеющих неподвижных элементов?

4. Петя и Вася играют в игру, правила которой таковы. Петя загадывает натуральное число x с суммой цифр 2012. За один ход Вася выирает любое натуральное число a и узнает сумму цифр числа $|x - a|$. Какое наименьшее число ходов потребуется Васе, чтобы гарантрованно найти x?

5. В каждой клетке бесконечного клетчатого листа расставлены действительные числа. Оказалось, что сумма чисел в каждом квадрате по модулю не превосходит 1. Докажите, что сумма чисел в любом прямоугольнике не превосходит 1000.

source:combinatorics/mixture-g11/r1.tex